数理解析研究所講究録 1412 巻 2005 年 189-198

零次元代数的局所コホモロジー類に付随するホロノミック系の構成アルゴリズム

新潟大学工学部情報工学科 田島慎一 (Shinichi Tajima)
Niigata University
お茶の水女子大学大学院 中村弥生 (Yayoi Nakamura)
Ochanomizu University

1 目的

有理数体 $\mathbb{Q}$ を K とおき, 有理数係数の n 変数多項式全体のなす環 $K[x_1,\ldots,x_n]$ を $K[x]$ とおく. n 個の多項式 $f_1,\ldots,f_n\in K[x]$ であり, 正規列 $F=(f_1,\ldots,f_n)$ をなすものが与えられたとする. これらの多項式が生成するイデアル $\langle f_1,\ldots,f_n\rangle$ を $I\subset K[x]$ とおき, イデアル I の $X=\mathbb{C}^n$ における零点集合 $V(I)=\{x\in X\mid f(x)=0,{}^\forall f\in I\}$ を Z とおく. イデアル I の準素イデアル分解 $I=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_\lambda\cap\cdots\cap I_\ell$ をとる. 準素イデアル I_λ の定める素イデアル $\sqrt{I_\lambda}$ を $\mathfrak{p}_\lambda$ で表し, $X=\mathbb{C}^n$ における $\mathfrak{p}_\lambda$ の零点集合 $V(\mathfrak{p}_\lambda)$ を Z_λ で表す.

次の自然な写像

$$i: Ext^n_{K[x]}(K[x]/I,K[x])\to H^n_{[Z]}(K[x])$$

による Grothendieck symbol

$$\left[\begin{array}{c}1\\ f_1\ldots f_n\end{array}\right]\in Ext^n_{K[x]}(K[x]/I,K[x])$$

の像を $\tau_F\in H^n_{[Z]}(K[x])$ で表すことにする.

零次元多様体 Z は $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_\lambda \cup \cdots \cup Z_\ell$ なる既約分解をもつ. 従って, 代数的局所コホモロジー類 τ_F は Z_λ に台を持つ代数的局所コホモロジー類により直和分解することができる. その直和分解を

$$\tau_F = \tau_{F,1} + \cdots + \tau_{F,\lambda} + \cdots + \tau_{F,\ell}$$

とする. 但し, $\tau_{F,\lambda} \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ である.

有理数係数の多項式を係数に持つ偏微分作用素全体のなす Weyl 代数 $K[x, \frac{\partial}{\partial x}]$ を D_X とおく. 代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda} \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ に対し, その D_X における annihilator を考え,

$$Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda}) = \{P \in D_X \mid P\tau_{F,\lambda} = 0\}$$

と定める. 次が成立することは基本的であり, よく知られている.

定理 1.1 D_X-加群 $D_X/Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ は Z_λ の各点 $\beta \in Z_\lambda$ において単純なホロノミック D_X-加群となる.

今, $f_1, \ldots, f_n$ のヤコビ行列式を J とおき,

$$\mu_\lambda = \dim_K(K[x]/I_\lambda)/\dim_K(K[x]/\mathfrak{p}_\lambda)$$

とおく. Z_λ に台を持つデルタ関数を $\delta_{Z_\lambda} \in H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])$ とすると, $J\tau_{F,\lambda} = \mu_\lambda \delta_{Z_\lambda}$ が成り立つ. このことに注意すると, 代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda}$ は次の方程式系の解として定数倍も込めて一意的に特徴付けられることが分かる.

$$\begin{cases} P\sigma = 0, {}^\forall P \in Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda}), \\ J\sigma = \mu_\lambda \delta_{Z_\lambda}. \end{cases}$$

すなわち, 代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda}$ はホロノミック系

$$M_{F,Z_\lambda} = D_X/Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$$

により完全に統制されることになる.

代数的局所コホモロジー類 $\tau_{F,\lambda}$ を用いた解析を具体的に展開する際には, イデアル $Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ を実際に構成し, その生成元を求めることが重要となる. そこで本稿では, イデアル $Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ の性質を調べ, その結果を用いて, イデアル $Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ の生成元を構成するアルゴリズムを導出する.

2 annihilator の諸性質

高々 k 階の偏微分作用素全体のなす集合を $D_X(k) \subset D_X$ とおく. 今, $\{P \in D_X(k) \mid P\tau_{F,\lambda} = 0\}$ が D_X 上生成するイデアルを $Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda})$ とおく. 明らかに

$$Ann_{D_X}^{(0)}(\tau_{F,\lambda}) \subseteq Ann_{D_X}^{(1)}(\tau_{F,\lambda}) \subseteq \cdots \subseteq Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda}) \subseteq \cdots$$

が成り立つ. 各 k に対し, $Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda})$ に対応する D_X-加群 $M_{F,Z_\lambda}^{(k)}$ を

$$M_{F,Z_\lambda}^{(k)} = D_X / Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda})$$

で定める. $M_{F,Z_\lambda}^{(k)}$ は Z_λ に台をもつホロノミック系となる.

命題 2.1 $P \in D_X$ は $Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ に属する k 階の偏微分作用素であるとする. P の主表象 $\sigma(P)$ を $\sigma(P)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ とおく. このとき, $|\alpha| = k$ なる全ての *multi-index* α に対して, $a_\alpha(x) \in \mathfrak{p}_\lambda$ が成り立つ.

証明) M_{F,Z_λ} は Z_λ に台をもつホロノミック系であるので, $\mathrm{Ch}(M_{F,Z_\lambda}) = T_{Z_\lambda}^*(X)$ が成り立つ. 主表象 $\sigma(P)(x,\xi)$ は $T_{Z_\lambda}^*(X)$ 上恒等的に零に等しいことから, $a_\alpha(x) \in \mathfrak{p}_\lambda$ が従う. □

$M_{F,Z_\lambda}^{(k)}$ の特性多様体 $T_{Z_\lambda}^*(X)$ の重複度を $\mu_\lambda^{(k)}$ で表すことにする.

補題 2.1 次が成り立つ.

(i) $\mu_\lambda^{(0)} = \mu_\lambda = \dim_K(K[x]/I_\lambda)/\dim_K(K[x]/\mathfrak{p}_\lambda)$.
(ii) $\mu_\lambda^{(0)} \geq \mu_\lambda^{(1)} \geq \cdots$.

証明) $Ann_{D_X}^{(0)}(\tau_{F,\lambda}) = D_X I_\lambda$ より (i) は自明. $Ann_{D_X}^{(j)}(\tau_{F,\lambda})$ がイデアルの増加列をなすことから, (ii) も明らか. □

D_X のネター性より, $Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda}) = Ann_{D_X}^{(p)}(\tau_{F,\lambda})$, すなわち $M_{F,Z_\lambda} = M_{F,Z_\lambda}^{(p)}$ を満たす自然数 p が存在する.

補題 2.2 次は同値.

(i) $M_{F,Z_\lambda}^{(p)} = M_{F,Z_\lambda}$.
(ii) $\mu_\lambda^{(p)} = 1$.
(iii) $Hom_{D_X}(M_{F,Z_\lambda}^{(p)}, H_{[Z_\lambda]}^n(K[x])) = \mathrm{Span}_K(\tau_{F,\lambda})$.

以下, $\mathfrak{L}_\lambda^{(k)} = D_X(k) \cap Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ とおく. $Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda})$ は $\mathfrak{L}_\lambda^{(k)}$ が D_X 上生成する左イデアルに他ならない.

偏微分作用素 $P, Q \in D_X$ に対し, その交換子積 $PQ - QP$ を $[P,Q]$ で表すことにする.

補題 2.3 $[\mathfrak{L}_\lambda^{(k)}, \mathfrak{L}_\lambda^{(0)}] \subseteq \mathfrak{L}_\lambda^{(k-1)}$ が成立する.

証明) $P \in \mathfrak{L}_\lambda^{(k)}, g \in \mathfrak{L}_\lambda^{(0)}$ に対し, 交換子積 $[P,g]$ を取る. $[P,g] \in D_X(k-1)$ となる. また, $[P,g]\tau_{F,\lambda} = Pg\tau_{F,\lambda} - gP\tau_{F,\lambda} = 0$ であるから, $[P,g] \in Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ が成立する. □

定理 2.1 $P \in D_X(k)$ が次の性質を満たすとする.

$$[P,g] \in \mathfrak{L}_\lambda^{(k-1)}, {}^\forall g \in \mathfrak{L}_\lambda^{(0)} = I_\lambda.$$

このとき, $h \in K[x]$ であり, $(P+h)\tau_{F,\lambda} = 0$ を満たすものが存在する.

証明) $g \in \mathfrak{L}_\lambda^{(0)}$ より, $[P,g]\tau_{F,\lambda} = Pg\tau_{F,\lambda} - gP\tau_{F,\lambda} = -gP\tau_{F,\lambda}$ となる. よって,

$$g(P\tau_{F,\lambda}) = 0, {}^\forall g \in I_\lambda.$$

すなわち,

$$P\tau_{F,\lambda} \in Hom_{K[x]}(K[x]/I_\lambda, H^n_{[Z_\lambda]}(K[x]))$$

が成り立つ. $Hom_{K[x]}(K[x]/I_\lambda, H^n_{[Z_\lambda]}(K[x])) \cong Ext^n_{K[x]}(K[x]/I_\lambda, K[x])$ は $K[x]$ 上 $\tau_{F,\lambda}$ で生成されるので, $P\tau_{F,\lambda} = -h\tau_{F,\lambda}$ なる $h \in K[x]$ が存在する. 従って, $(P+h)\tau_{F,\lambda} = 0$ を満たす $h \in K[x]$ が存在することになる. □

さて, イデアル I_λ に対し $\chi \in K[x]$ であり,

$$\begin{cases} \chi \in I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_{\lambda-1} \cap I_{\lambda+1} \cap \cdots \cap I_\ell \\ \chi - 1 \in I_\lambda \end{cases}$$

を満たす χ を一つ選び, χ_λ とおく.

補題 2.4 $P \in D_X(k)$ が条件 $[P,g] \in \mathfrak{L}_\lambda^{(k-1)}, {}^\forall g \in I_\lambda$ を満たすとする. このとき, $P + h \in \mathfrak{L}_\lambda^{(k)}$ となる必要十分条件は, $(P+h)\chi_\lambda \in Ann_{D_X}(\tau_F)$ で与えられる.

証明) $\tau_F = \tau_{F,1} + \cdots + \tau_{F,\lambda} + \cdots + \tau_{F,\ell}$ より, $\chi_\lambda\tau_F = \tau_{F,\lambda}$ を得る. よって, $P + h \in \mathfrak{L}_\lambda^{(k)}$ ならば, $(P+h)\chi_\lambda\tau_F = 0$ を得る. 逆も明らかである. □

3 アルゴリズム導出の準備

この節では, annihilator $Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda})$ の生成元を求めるアルゴリズムを導出する際に必要となる事柄について述べる.

まず, 多項式環 $K[x]$ に項順序 $\succ$ を入れ, 以下, 固定する. 多項式環 $K[x]$ の全ての項 x^γ が作る集合を T とおく. また, 準素イデアル I_λ に対し, $T_\lambda \subset T$ を

$$T_\lambda = \{\mathrm{ht}(g) \mid g \in I_\lambda\}$$

で定める. ここで, $\mathrm{ht}(g)$ は g の head term を表す. 更に,

$$E_\lambda = \mathrm{Span}_K\{x^\gamma \in T \mid x^\gamma \notin T_\lambda\}$$

とおく. E_λ は, μ_λ 次元のベクトル空間となる.

偏微分作用素からなる集合 $\{(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$ の上に全次数辞書式項順序 $(\frac{\partial}{\partial x_1} \succ \cdots \succ \frac{\partial}{\partial x_n})$ を入れる. $|\alpha| = k$ なる multi-index α に対し,

$$\mathfrak{L}^{(k)}_{\lambda,\alpha} = \{P \in \mathfrak{L}^{(k)}_\lambda \mid P = a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha + \sum_{\beta \prec \alpha} a_\beta(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\beta\}$$

とおく.

$$I_{\lambda,\alpha} = \{a_\alpha(x) \mid ^\exists P \in \mathfrak{L}^{(k)}_{\lambda,\alpha}, \text{ s.t., } P = a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha + \sum_{\beta \prec \alpha} a_\beta(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\beta\}$$

と定める.

命題 3.1 次が成立する.

(i) $I_{\lambda,\alpha}$ は $K[x]$ のイデアルである.

(ii) $I_{\lambda,\alpha} \subset \mathfrak{p}_\lambda$ が成り立つ.

証明) $\mathfrak{L}^{(k)}_{\lambda,\alpha}$ は $K[x]$ 加群の構造を持つので, (i) は自明. (ii) は, $a_\alpha(x)\xi^\alpha$ が微分作用素 $P \in \mathfrak{L}^{(k)}_{\lambda,\alpha}$ の主表象の項の一つであることから従う. □

次に, $2n$ 変数の多項式環 $K[x,\xi]$ の項順序を

$$x^\gamma \xi^\alpha \succ x^{\gamma'} \xi^{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \succ \alpha' \text{ または} \\ \alpha = \alpha' \text{ かつ } \gamma \succ \gamma' \end{cases}$$

で定める. 但し, 変数 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に関する項順序は, 多項式環 $K[x]$ に既に与えられていた項順序であるとし, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ に関しては, 全次数辞書式順序 $\xi_1 \succ \xi_2 \succ \cdots \succ \xi_n$ を用いる.

k 階の偏微分作用素 $P = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \in D_X$ に対し, その主表象 $\sigma(P)(x,\xi) \in K[x,\xi]$ の head term $\mathrm{ht}(\sigma(P))$ を偏微分作用素 P の head term と呼び, $\mathrm{ht}(P)$ で表すことにする. $|\alpha| = k$ なる multi-index α に対し, $T_{\lambda,\alpha} = \{x^\gamma \mid ^\exists\ P \in \mathfrak{L}^{(k)}_{\lambda,\alpha}, \text{ s.t., } \mathrm{ht}(P) = x^\gamma\xi^\alpha\}$ とおく. T_λ は, $|\alpha| = 0$ すなわち $\alpha = (0,\ldots,0)$ に対する $T_{\lambda,(0,\ldots,0)}$ に他ならない. ベクトル空間 $E_{\lambda,\alpha}$ を $T_{\lambda,\alpha}$ に属さない単項式が生成するベクトル空間として定める.

$$E_{\lambda,\alpha} = \mathrm{Span}_K\{x^\gamma \in T \mid x^\gamma \notin T_{\lambda,\alpha}\}.$$

補題 3.1 $E_{\lambda,\alpha} \subset E_\lambda$ が成り立つ.

証明) $g \in I_\lambda$ に対し, $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha g \in Ann^{(k)}_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ が成り立つことから, 全ての multi-index α に対し, $T_\lambda \subseteq T_{\lambda,\alpha}$ が成り立つことが分かる. □

定義 3.1 $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ を二つの *multi-index* とする. 全ての i に関し, $\alpha_1 - \beta_i \ge 0$ が成り立つことを $\alpha \ge \beta$ で表す. また, $\alpha \ge \beta$ であり, 少なくとも一つの i に関しては, $\alpha_i - \beta_i > 0$ となるとき, $\alpha > \beta$ と表す.

補題 3.2 二つの *multi-index* α, β が $\alpha \ge \beta$ を満たすとする. このとき, $E_{\lambda,\alpha} \subseteq E_{\lambda,\beta}$ が成り立つ.

証明) $b(x) \in T_{\lambda,\beta}$ とする. $\mathrm{ht}(Q) = b(x)\xi^\beta$ なる $Q \in Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ をとる. 今, $P = (\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha-\beta} Q$ とおく. $\sigma(P) = \sigma(Q)\xi^{\alpha-\beta}$ より, $\mathrm{ht}(P)(x,\xi) = \mathrm{ht}(Q)(x,\xi)\xi^{\alpha-\beta} = b(x)\xi^\alpha$ を得る. $P \in Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ が成り立つので, $b(x) \in T_{\lambda,\alpha}$ を得る. $T_{\lambda,\beta} \subseteq T_{\lambda,\alpha}$, すなわち, $E_{\lambda,\alpha} \subseteq E_{\lambda,\beta}$ が証明された. □

さて, 準備が整ったので, $Ann^{(k)}_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ の生成元の構成法について考える. $Ann^{(j)}_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ は増加列をなすことを利用し, j に関し, 逐次的に生成元を構成する. 基本的アイデアは以下の2点である.

- $\mathfrak{L}^{(i)}_{\lambda,\alpha}$ の $K[x]$-加群の構造を利用する. 生成元は, 作用素 $a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha + \sum_{\beta\prec\alpha} a_\beta(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\beta \in \mathfrak{L}^{(i)}_{\lambda,\alpha}$ で, 条件 $a_\alpha(x) \in \mathrm{Gr}(I_{\lambda,\alpha})$ を満たすものの中から見つける. ここで $\mathrm{Gr}(I_{\lambda,\alpha})$ はイデアル $I_{\lambda,\alpha} \subset K[x]$ のグレブナ基底の集合である.
- $Ann^{(k-1)}_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ の生成元による簡約 (reduction) を行う.

今, $|\alpha| = k$ なる multi-index α が与えられたとする. $\beta \prec \alpha$ なる全ての multi-index β に対し, $V_{\lambda,\beta}^{(|\beta|)}$ であり, 次の条件を満たすものが与えられているとする.

- $V_{\lambda,\beta}^{(i)} \subset \mathfrak{L}_{\lambda,\beta}^{(i)}$.
- $V_\lambda^{(i)} = \cup_{|\beta|=i} V_{\lambda,\beta}^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$.
- $V_\lambda^{(0)} \cup \cdots \cup V_\lambda^{(j)}$ は D_X 上 $Ann_{D_X}^{(j)}(\tau_{F,\lambda})$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ を生成する.

さらにここで, 各 $\beta \prec \alpha$ に対し, $P \in V_{\lambda,\beta}^{(|\beta|)}$ なる偏微分作用素 P を $P = a_\beta(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\beta + \sum_{\gamma \prec \beta} a_\gamma(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\gamma$ とおくとき, $a_\beta(x) \in \mathrm{Gr}(I_{\lambda,\beta})$ が成り立つものとする. また, $\beta \prec \alpha$ なる multi-index β に対し, $T_{\lambda,\beta}$, $E_{\lambda,\beta}$ 等も構成済みであるとする.

以上の仮定のもとで, $\mathfrak{L}_{\lambda,\alpha}^{(k)}$ に属する偏微分作用素 P で $Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda})$ の生成元として新たに必要となるものの候補の与え方を考える. まず, $P \in \mathfrak{L}_{\lambda,\alpha}^{(k)}$ を

$$P = a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha + \sum_{|\alpha'|=k, \alpha' \prec \alpha} a_{\alpha'}(x)(\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha'} + \sum_{|\beta| \le k-1} a_\beta(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\beta$$

とおく. 命題 2.1 より, $a_\alpha(x) \in \mathfrak{p}_\lambda$, $a'_\alpha(x) \in \mathfrak{p}_\lambda$ が成り立つ.

P に対し, $V_\lambda^{(0)}, \ldots, V_\lambda^{(k-1)}$ による簡約操作を行うことで, P の低階項 ($k-1$ 階以下) の部分 $(\frac{\partial}{\partial x})^\beta$ の係数多項式 $a_\beta(x)$ は全て $E_{\lambda,\beta}$ に属すると仮定してよい. 同様に, $a_{\alpha'}(x) \in E_{\lambda,\alpha'}$ と仮定してよい. ベクトル空間 $S_{\lambda,\alpha}$ を

$$S_{\lambda,\alpha} = \mathrm{Span}_K\{b \in T \mid b \notin \cup_{\beta < \alpha} T_{\lambda,\beta}\}$$

で定める. $a_\alpha(x)$ に関しても $V_\lambda^{(0)}, \ldots, V_\lambda^{(k-1)}$ による簡約を考える. 補題 3.2 により $a_\alpha(x) \in S_{\lambda,\alpha}$ と仮定してよい.

まとめ : $\mathfrak{L}_{\lambda,\alpha}^{(k)}$ の新たな生成元の候補となる偏微分作用素を

$$P = a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha + \sum_{|\alpha'|=k, \alpha' \prec \alpha} a_{\alpha'}(x)(\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha'} + \sum_{|\beta| \le k-1} a_\beta(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\beta$$

とおく. このとき, P の係数多項式はあらかじめ

$$a_\alpha(x) \in U_{\lambda,\alpha},\ a_{\alpha'}(x) \in B_{\lambda,\alpha'},\ a_\beta(x) \in E_{\lambda,\beta}$$

をみたすとしてよい. 但し, $U_{\lambda,\alpha} = S_{\lambda,\alpha} \cap \mathfrak{p}_\lambda$, $B_{\lambda,\alpha'} = E_{\lambda,\alpha'} \cap \mathfrak{p}_\lambda$ とおく.

4 アルゴリズムの概略

第2節と第3節で述べたことを組み合わせることで, イデアル $Ann^{(k)}_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ の生成元を逐次構成するアルゴリズムを与える.

step 0 集合 $V^{(0)}_\lambda$ の構成

イデアル I_λ のグレブナ基底 $\mathrm{Gr}(I_\lambda)$ を求め, $V^{(0)}_\lambda = \mathrm{Gr}(I_\lambda)$ とおく.

$V^{(0)}_\lambda = \mathrm{Gr}(I_\lambda)$ は $Ann^{(0)}_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ の D_X 上の生成元となる.

$$E_\lambda = \mathrm{Span}_K\{x^\gamma \in T \mid \mathrm{NF}_{I_\lambda} x^\gamma = x^\gamma\}$$

で E_λ を定める.

素イデアル $\mathfrak{p}_\lambda$ のグレブナ基底 $\mathrm{Gr}(\mathfrak{p}_\lambda) = \langle p_{\lambda,1}, \ldots, p_{\lambda,n}\rangle$ を求める. ここで, $\mathrm{ht}(p_{\lambda,1}) \succ \cdots \succ \mathrm{ht}(p_{\lambda,n})$ を満たしているとする.

$E_\lambda \cap \mathfrak{p}_\lambda$ に含まれる任意の多項式 $a(x)$ は, 割算の順序を指定することにより, $a(x) = q_{\lambda,1}(x)p_{\lambda,1}(x) + \cdots + q_{\lambda,n}(x)p_{\lambda,n}(x)$ なる一次結合の形に一意的に表すことができる. $p_{\lambda,i}$ の係数に表れる多項式全てのなすベクトル空間を $Q_{\lambda,i}$ とおく.

step 1 集合 $V^{(1)}_\lambda$ の構成

(1) $\alpha = (0, \ldots, 0, 1)$ とおき, $V^{(1)}_{\lambda,\alpha}$ を求める.

$R = a(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$ とおく. ここで, $a(x) \in E_\lambda \cap \mathfrak{p}_\lambda$ としてよいので, $q_{\lambda,i} \in Q_{\lambda,i}$ を用いて $a(x) = q_{\lambda,1}(x)p_{\lambda,1}(x) + \cdots + q_{\lambda,n}(x)p_{\lambda,n}(x)$ とおく. 条件 $[R, g] = a_\alpha(x)\frac{\partial g}{\partial x_n} \in I_\lambda$, ${}^\forall g \in I_\lambda$ より $a_\alpha(x)$ を求める.

$T_{\lambda,\alpha}$, $E_{\lambda,\alpha}$ を計算しておく. $I_{\lambda,\alpha}$ のグレブナ基底 $\mathrm{Gr}(I_{\lambda,\alpha})$ を求め, $a'_n(x) \in \mathrm{Gr}(I_{\lambda,\alpha})$ となる作用素 R に対し, $R + h \in \mathfrak{L}^{(1)}_\lambda$ となる h を計算し, $P = R + h$ とおき, $V_{\lambda,\alpha}$ を構成する.

(2) $\alpha = (0, \ldots, 0, 1, 0)$ に対する $V^{(1)}_{\lambda,\alpha}$ を求める.

$R = a_{n-1}(x)\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$ とおく. 但し, $a_{n-1}(x) \in E_\lambda \cap \mathfrak{p}_\lambda$, $a_n(x) \in E_{\lambda,(0,\ldots,0,1)} \cap \mathfrak{p}_\lambda$ とする.

条件 $[R, g] \in I_\lambda$, ${}^\forall g \in \mathrm{Gr}(I_\lambda)$ を満たす 係数多項式の組 $(a_{n-1}(x), a_n(x))$ を求める. $E_{\lambda,\alpha}$ を計算しておく.

イデアル $I_{\lambda,\alpha}$ のグレブナ基底 $\mathrm{Gr}(I_{\lambda,\alpha})$ を求める.

$a_{n-1}(x) \in \mathrm{Gr}(I_{\lambda,\alpha})$ となる1階の作用素 R に対し, $R + h \in \mathfrak{L}^{(1)}_\lambda$ となる多項式 $h \in E_\lambda$ を求め, $P = R + h$ とおき, $V_{\lambda,\alpha}$ を求める.

(3)-(n) 以下, 同様にして, $|\alpha| = 1$ なる全ての α に対し, $T_{\lambda,\alpha}$, $E_{\lambda,\alpha}$, $\mathrm{Gr}(I_{\lambda,\alpha})$ を求め, $V_{\lambda,\alpha}$ を構成する. $V_\lambda^{(1)} = \cup_{|\alpha|=1} V_{\lambda,\alpha}^{(1)}$ とおく. $V_\lambda^{(0)} \cup V_\lambda^{(1)}$ は $Ann_{D_X}^{(1)}(\tau_{F,\lambda})$ の生成元の集合となる.

step j 集合 $V_\lambda^{(j)}$ の構成

α は $|\alpha| = j$ なる multi-index であるとする. $|\alpha'| = j$ で $\alpha' \prec \alpha$ となる全ての α' に対し, $V_{\lambda,\alpha'}^{(j)}$ は既に構成されているとする.

$U_{\lambda,\alpha} = U_{\lambda,\alpha,1}p_{\lambda,1} + U_{\lambda,\alpha,2}p_{\lambda,2} + \cdots + U_{\lambda,\alpha,n}p_{\lambda,n}$ となるベクトル空間 $U_{\lambda,\alpha,i}$ を構成しておく.

$V_{\lambda,\alpha}^{(j)}$ に属する新たな生成元の候補を求めるため,

$$R = a_\alpha(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha + \sum_{|\alpha'|=j,\alpha'\prec\alpha} a_{\alpha'}(x)(\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha'} + \sum_{|\beta|<j} a_\beta(x)(\frac{\partial}{\partial x})^\beta$$

とおく. 但し, $a_\alpha(x) \in U_{\lambda,\alpha}$, $a_{\alpha'}(x) \in B_{\lambda,\alpha'}$, $a_\beta(x) \in E_{\lambda,\beta}$ とする.

$a_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n u_{\lambda,\alpha,i}(x)p_{\lambda,i}(x)$, $a_{\lambda,\alpha,i} \in U_{\lambda,\alpha,i}$,
$a_{\alpha'}(x) = \sum q_{\lambda,\alpha',i}(x)p_{\lambda,i}(x)$, $q_{\lambda,\alpha',i} \in Q_{\lambda,\alpha',i}$ とおく.

条件 $[R,g] \in \mathfrak{L}_\lambda^{(k-1)}, g \in \mathrm{Gr}(I_\lambda)$ により, 係数多項式 a_α, $a_{\alpha'}$, a_β を定める.

$T_{\lambda,\alpha}$, $\mathrm{Gr}(I_{\lambda,\alpha})$ を求める.

係数多項式 $a_\alpha(x)$ がイデアル $I_{\lambda,\alpha}$ のグレブナ基底 $\mathrm{Gr}(I_{\lambda,\alpha})$ の要素となる偏微分作用素 R を全て選び出し, これらの作用素 R に対し, $(R+h(x))\chi_\lambda \in \mathfrak{L}^{(k)}$ となる $h(x) \in E_\lambda$ を定め, $P = R + h$ とおき, 集合 $V_{\lambda,\alpha}^{(j)}$ を構成する.

$E_{\lambda,\alpha}$ 及び, $B_{\lambda,\alpha}$ を求め, $B_{\lambda,\alpha} = Q_{\lambda,\alpha,1}p_{\lambda,1} + \cdots + Q_{\lambda,\alpha,n}p_{\lambda,n}$ となるベクトル空間 $Q_{\lambda,\alpha,i}$ を構成する.

$|\alpha| = j$ となる全ての α に対し, 上記の計算を逐次おこない, $V_\lambda^{(j)} = \cup_{|\alpha|=j} V_{\lambda,\alpha}^{(j)}$ とおく.

以上の step を step k まで実行することで, $V_\lambda^{(0)}, \ldots, V_\lambda^{(k)}$ を求める. 和集合 $V_\lambda^{(0)} \cup \cdots \cup V_\lambda^{(k)}$ は $Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda})$ の生成元を与える.

ホロノミック系 $M_{F,\lambda}^{(k)} = D_X/Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda})$ の重複度 $\mu_\lambda^{(k)}$ が 1 となれば, $Ann_{D_X}^{(k)}(\tau_{F,\lambda}) = Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ であるので, $V_\lambda^{(0)} \cup \cdots \cup V_\lambda^{(k)}$ が $Ann_{D_X}(\tau_{F,\lambda})$ の生成元となる.

参考文献

[1] Y. NAKAMURA and S. TAJIMA, *A method for constructing holonomic systems for algebraic local cohomology classes with support on a zero dimensional variety*, Proceedings of the First International Congress of Mathematical Software, World Scientific, 158–168 (2002).

[2] 田島慎一, Grothendieck duality の計算と多変数 Hermite 補間問題, 京都大学数理解析研究所講究録 1085「数式処理における理論と応用の研究」(1999), 82–90.

[3] 田島慎一, 中村弥生, 代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系の構成法について II, 京都大学数理解析研究所講究録 1295「Computer Algebra - Algorithms, Implementations and Applications」(2002), 1–8.

[4] 田島慎一, 零次元準素イデアルの Noether 作用素とホロノミック *D*-加群, 京都大学数理解析研究所講究録「Computer Algebra-Design of Algorithms, Implementations and Applications」, 掲載予定.

[5] S. TAJIMA and Y. NAKAMURA, *Computational aspects of Grothendieck local residues*, "Séminaires et Congrès" (Société Mathématique de France), to appear.

[6] 田島慎一, 中村弥生, Hermite-Jacobi 再生核の計算代数解析, 京都大学数理解析研究所講究録「再生核の理論の応用」, 掲載予定.